



ce
pre
UNI

Álgebra

**Sistema lineal de n
ecuaciones con n incógnitas**

**CICLO
PREUNIVERSITARIO**

2024-1



Sistemas de 3 Ecuaciones Lineales con 3 Variables

Definición. Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 variables es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del sistema, $b_i \in \mathbb{R}$ y x, y, z son las variables.

Métodos de solución de un sistema lineal de 3×3

Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Método de reducción. El método de reducción consiste en aplicar el método de eliminación reduciendo el sistema (1) a un sistema lineal de 2×2 , resolviendo este sistema obtenemos los valores de 2 variables y luego por sustitución obtenemos el valor de la última variable.

Ejercicio. Resolver.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & (1) \\ x + 2y - z = 13 & (2) \\ 3x + 2y - 5z = 3 & (3) \end{cases}$$

De las ecuaciones (1) y (2) eliminamos la variable y , para lo cual sumamos las ecuaciones (1)+(2) :

$$2x - 2z = 14$$

$$x - z = 7 \quad (4)$$

De las ecuaciones (2) y (3) eliminamos la variable y , para lo cual restamos las ecuaciones (3)-(2) :

$$2x - 4z = 10$$

$$x - 2z = 5 \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) obtenemos que $x = 19, z = 12$, luego sustituyendo en la ecuación (1), $y = 3$. Por lo tanto $C.S. = \{(19,3,12)\}$.

Regla de Cramer

Dado el sistema lineal de 3×3 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Se cumple que: $\Delta_x = x \cdot |A|$, $\Delta_y = y \cdot |A|$, $\Delta_z = z \cdot |A|$

Donde $|A|$ es el determinante del sistema y $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ son los determinantes de las variables x, y, z respectivamente:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Regla de Cramer

Dado el sistema lineal de 3×3 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Solución única. El sistema (1) posee solución única si y solamente si $|A| \neq 0$, en caso afirmativo:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|}, \quad y = \frac{\Delta_y}{|A|}, \quad z = \frac{\Delta_z}{|A|}$$

Ejercicio. Resolver el siguiente sistema aplicando la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 1x - 2y - 1z = 1 \\ 1x + 2y - 1z = 13 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 13 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -152, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 13 & -1 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -24, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -96$$

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} = 19, \quad y = \frac{\Delta_y}{|A|} = 3, \quad z = \frac{\Delta_z}{|A|} = 12$$

Por lo tanto, el C. S. = $\{(19, 3, 12)\}$.

Solución de un sistema compatible de 3×3 aplicando la inversa de la matriz de coeficientes:

Ejemplo. Resolver.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ x + 2y - z = 13 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \end{cases} \quad (1)$$

El sistema (1) admite la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego multiplicando por la inversa de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el C.S. = $\{(19, 3, 12)\}$.

Teorema.

Todo sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales con 3 variables:

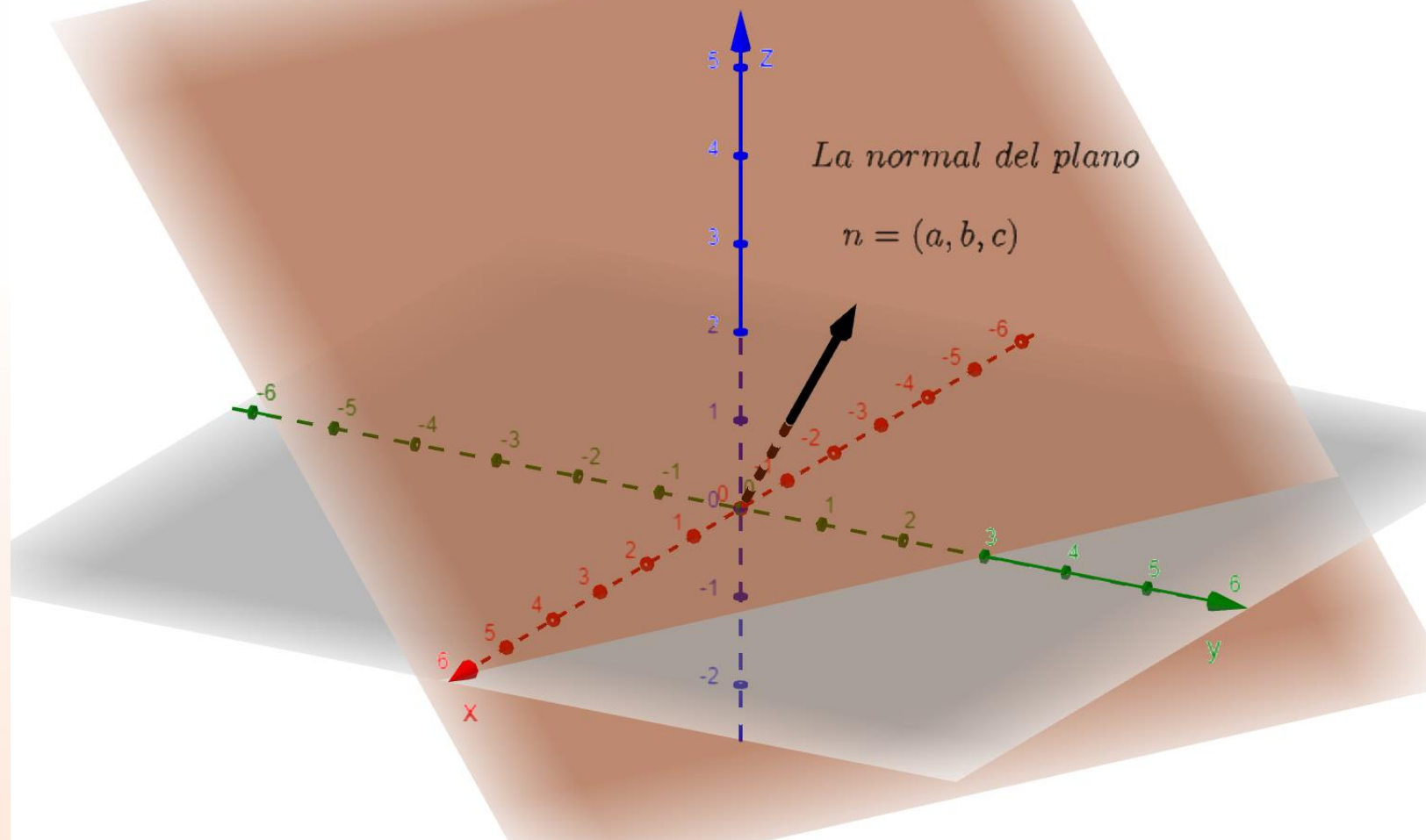
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

1.- Solución única (solución trivial) $\leftrightarrow |A| \neq 0$

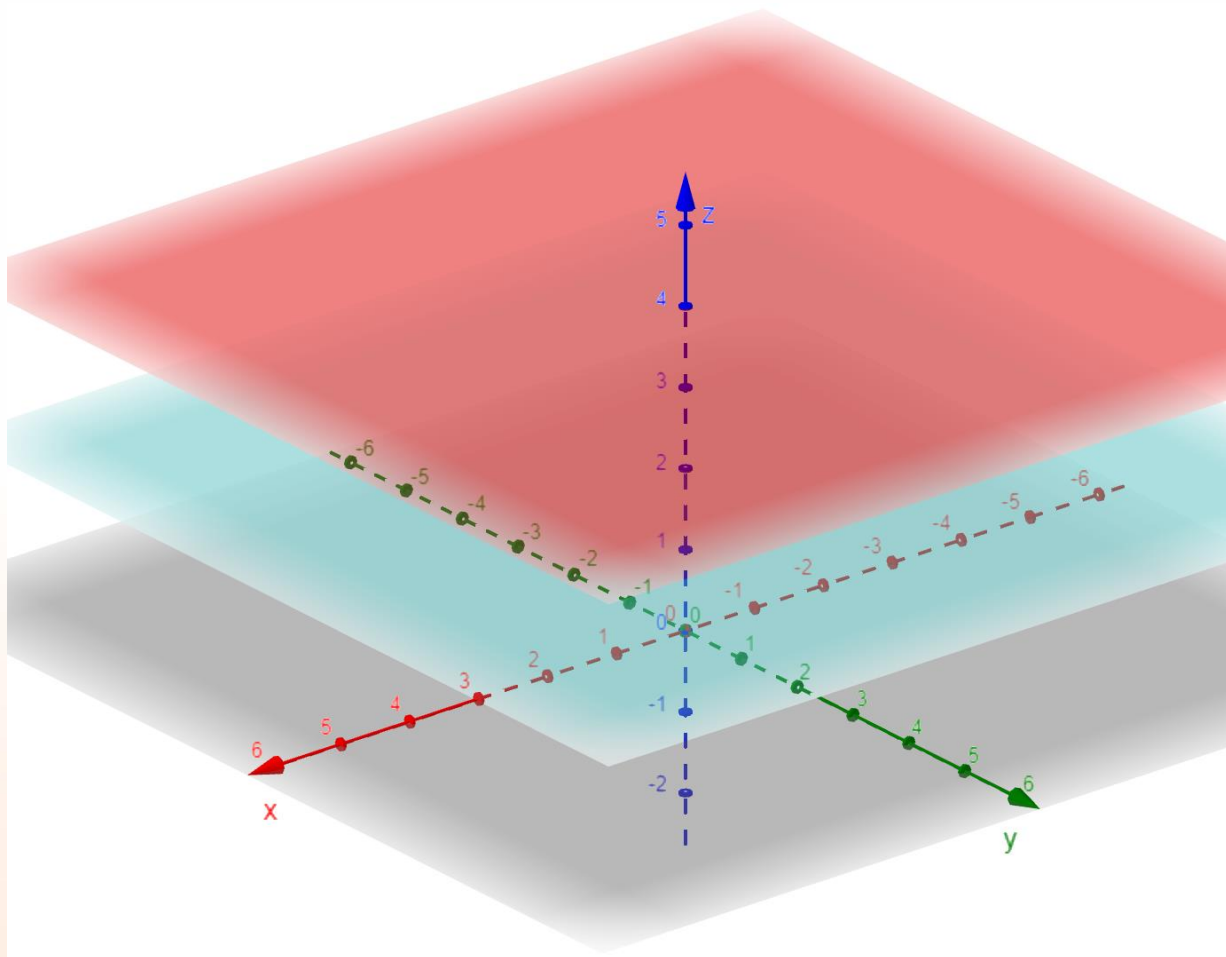
2.- Infinitas soluciones $\leftrightarrow |A| = 0$

El plano

La ecuación del plano : $ax + by + cz = d$

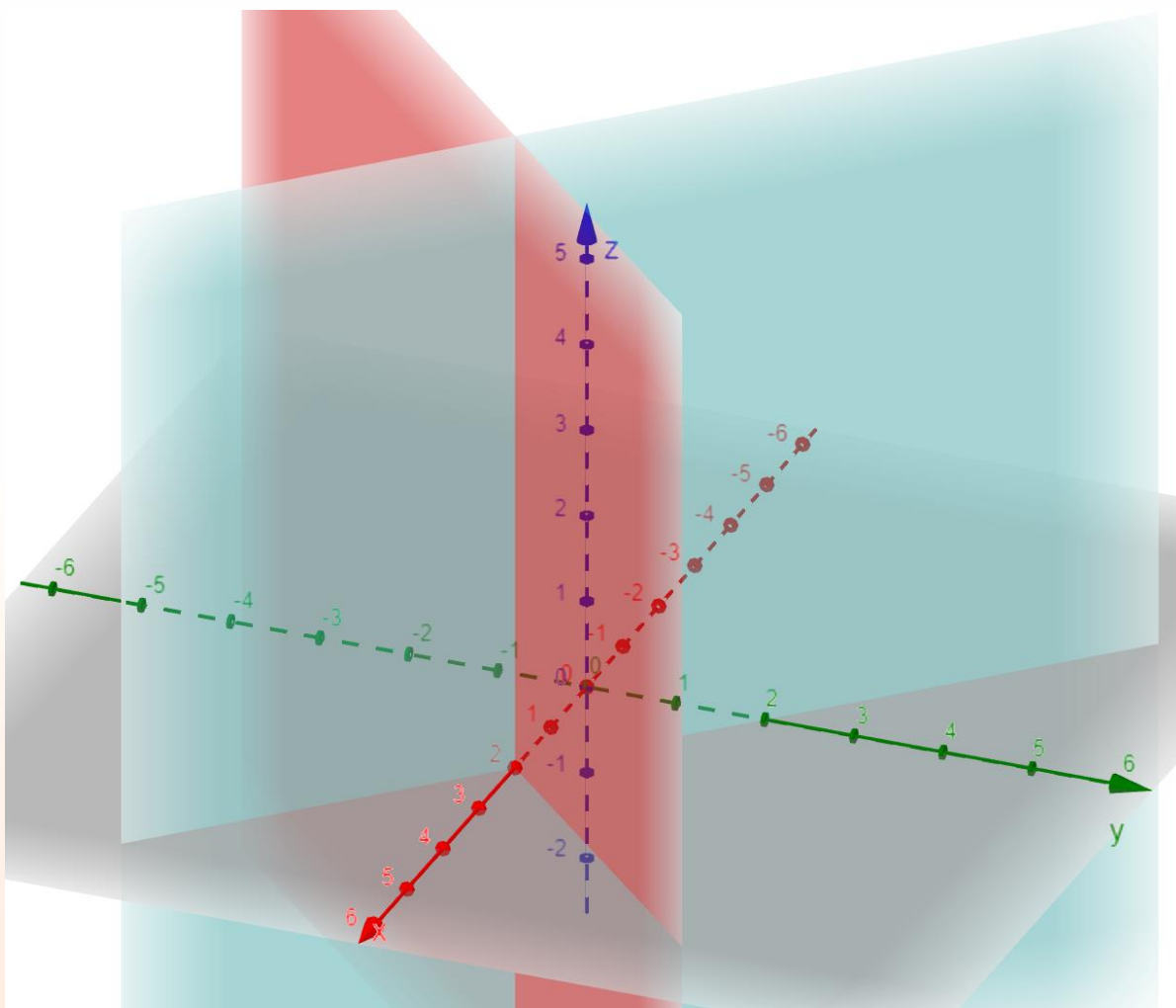


Planos paralelos



Los planos P_1 y P_2 son paralelos si y solo si sus normales son paralelos, es decir, n_1 es paralelo a n_2 . En otras palabras $\exists \alpha \in R, n_2 = \alpha n_1$

Planos perpendiculares

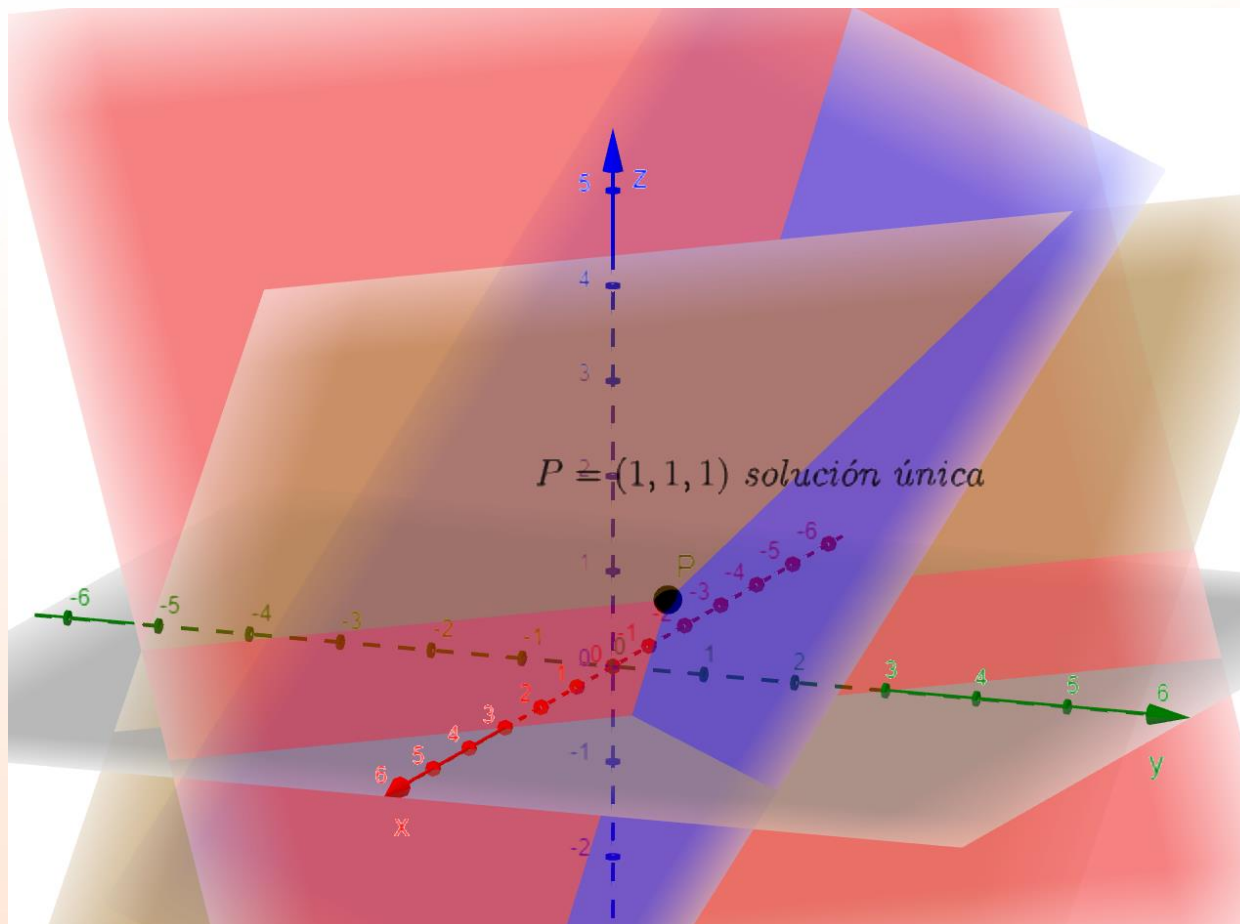


Los planos P_1 y P_2 son perpendiculares si y solo si sus normales son perpendiculares, es decir, n_1 es perpendicular a n_2 . En otras palabras $n_1 \cdot n_2 = 0$.

Interpretación Geométrica de un sistema compatible determinado:

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$$

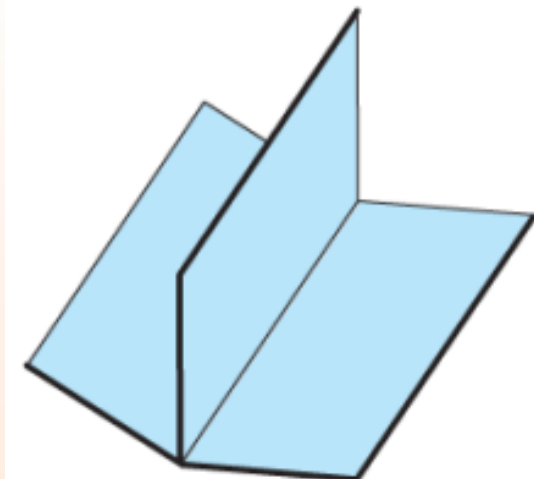


Interpretación Geométrica de un sistema compatible indeterminado

Ejemplo:

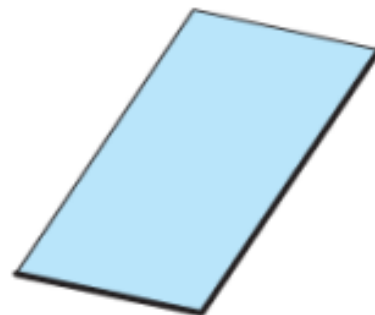
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

(1)



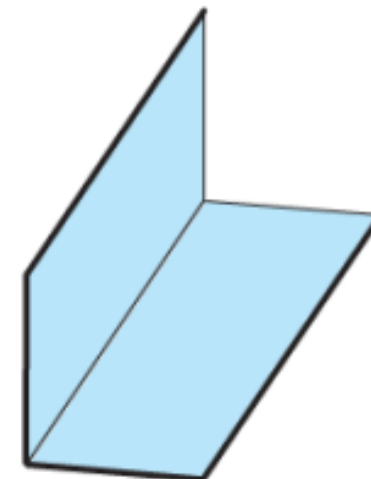
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

(2)



$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

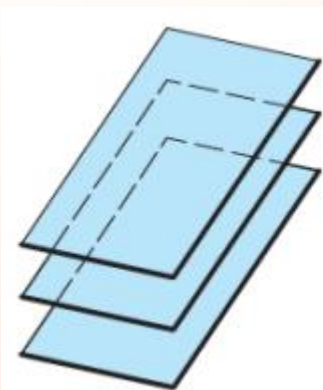
(3)



Interpretación Geométrica de un sistema incompatible

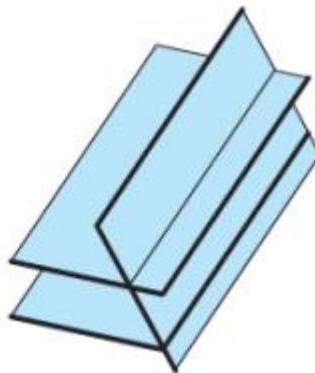
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(1)



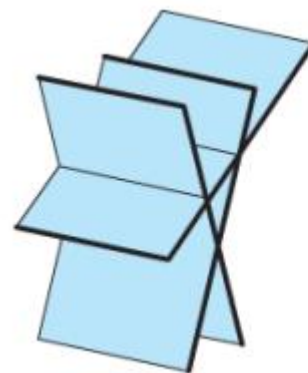
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(2)



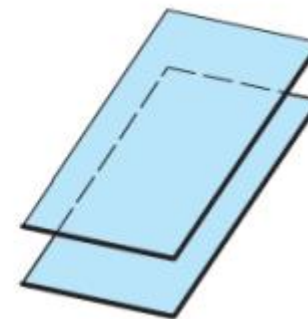
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

(3)



$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(4)



Nota: En un sistema homogéneo, todos los planos pasan por el origen.

Interpretación Geométrica de un sistema 3×3 homogéneo compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

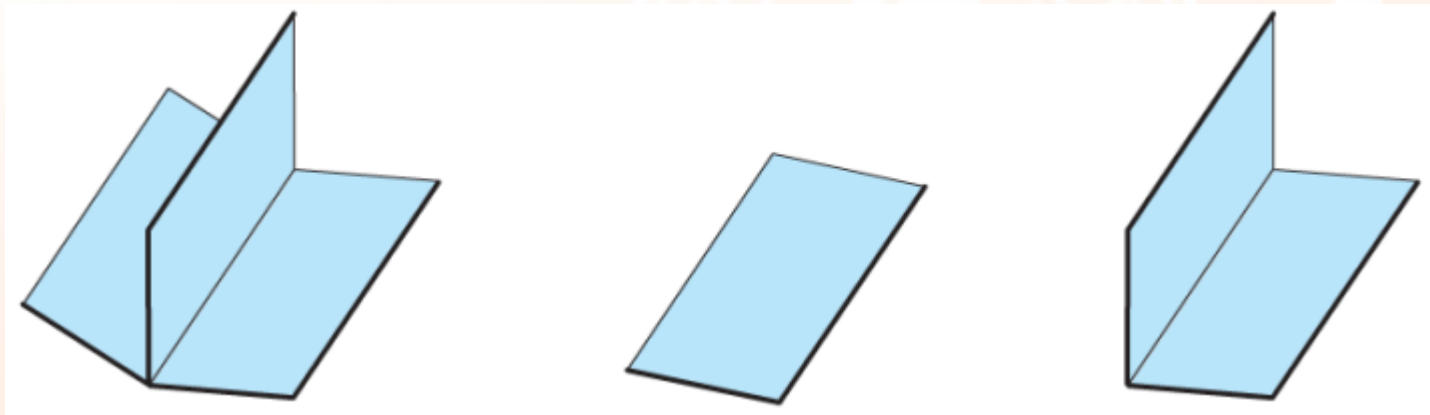
(1)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

(3)



Todos los planos pasan por el origen.

Definición: Un sistema de **n** ecuaciones lineales con **n** incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ (**S.E.L de n x n**), es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donde los coeficientes a_{ij} y b_j son números reales conocidos.

Cuya representación en forma matricial es:

$$AX = b$$

donde: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es la matriz de coeficientes

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es la matriz de incógnitas

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es la matriz de términos independientes

Sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

Formas de resolver un S.E.L de n ecuaciones con n incógnitas

I.- Método Algebraico

Emplea sus variables

- 1) Método de sustitución
- 2) Método de Reducción y
- 3) Método de Igualación

Ejemplo Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 5z + 7w = 12 \dots (1) \\ 3x + 5y + 7z + w = 0 \dots (2) \\ 5x + 7y + z + 3w = 4 \dots (3) \\ 7x + y + 3z + 5w = 16 \dots (4) \end{array} \right\} \text{y obtener el valor de } M = \frac{x-y}{z+w}$$

Resolución

Sumando y simplificando: (1) + (2) + (3) + (4),

$$x + y + z + w = 2 \dots \dots \dots (5)$$

además de (2) - (1) tenemos:

$$2x + 2y + 2z + 6w = -12 \dots \dots \dots (6)$$

Luego

$$-2x - 2y - 2z - 2w = -4 \dots \dots \dots (7)$$

sumando (6) y (7) tenemos: $w = 2$

$$(3)-(2) \rightarrow 2x + 2y - 6z + 2w = 4$$

$$-2(5) \rightarrow -2x - 2y - 2z - 2w = -4$$

Sumando, se obtiene

$$-8z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$(4)-(3) \rightarrow 2x - 6y + 2z + 2w = 12$$

$$-2(5) \rightarrow -2x - 2y - 2z - 2w = -4$$

Sumando, se obtiene

$$-8y = 8 \rightarrow y = -1$$

$$\text{En (1)} \rightarrow x = 1$$

$$\text{C.S} = \{(1, -1, 0, 2)\}$$

Luego:

$$M = \frac{x - y}{z + w} = \frac{1 - (-1)}{0 + 2} = 1$$

Sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

II.- Usando la regla de Cramer:

El sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Si la matriz A es invertible, entonces

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$$

Donde $\Delta_i = \det(C_1, \dots, b, \dots, C_n)$, $A = (C_1, \dots, C_n)$

Teorema

- 1) Si $|A| \neq 0$, si y solo si el **S.E.L de $n \times n$** tiene solución única.
- 2) Si el **S.E.L de $n \times n$** tiene infinitas soluciones, entonces
$$|A| = \Delta_1 = \dots = \Delta_n = 0$$
- 3) Si $|A| = 0$ y existe un $\Delta_i \neq 0$, entonces el sistema es incompatible.

Ejemplo: Determine el valor de k , para que el sistema dede ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + 2y - 5z = 4 \\ 2x + 5y - k^2z = k + 4 \end{cases}$$

- a) Tenga solución única
- b) Tenga Infinitas soluciones
- c) No tenga solución



Resolución

Calculamos el determinante de las incógnitas

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -k^2 \end{vmatrix} = k^2 - 4 \quad \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

a) Solución única $\leftrightarrow |A| \neq 0 \leftrightarrow k^2 - 4 \neq 0 \leftrightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

Analicemos para la parte b) y c)

Analizando para $k = 2$,

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + 2y - 5z = 4 \\ 2x + 5y - 4z = 6 \end{cases},$$

Entonces: $f_2 - f_1$ y $f_3 - 2f_1$, se obtiene:

Sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ -y - 6z = 2 \\ -y - 6z = 2 \end{cases}, \text{ sistema es indeterminado (infinitas soluciones)}$$

Analizando para $k = -2$

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + 2y - 5z = 4 \\ 2x + 5y - 4z = 2 \end{cases}$$

Entonces: $f_2 - f_1$ y $f_3 - 2f_1$, se obtiene:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ -y - 6z = 2 \\ -y - 6z = -2 \end{cases}, \text{ sistema inconsistente}$$

b) El sistema tiene infinitas soluciones si $k = 2$

c) El sistema es inconsistente (no tiene soluciones), si $k = -2$

Sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas

Nota:

1) $|A| \neq 0 \leftrightarrow$ el sistema tiene solución única.

Donde dicha solución es la trivial $x_1 = x_2 = x_3 = \dots x_n = 0$

2) $|A|=0 \leftrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Donde aparte de la trivial, también hay soluciones no triviales.

Ejemplo: Determine m si el sistema:

$$\begin{cases} (1 - m)x + y - z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ x - y - (m + 1)z = 0 \end{cases}, \text{ es indeterminado}$$

Resolución

Condición $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 - m & 1 & -1 \\ 2 & -m & -2 \\ 1 & -1 & -(m + 1) \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo y simplificando tenemos

$$m^3 = 4m \rightarrow m^3 - 4m = 0 \rightarrow m(m^2 - 4) = 0 \rightarrow m(m - 2)(m + 2) = 0$$

$$\therefore m = 0 \vee m = 2 \vee m = -2$$